

Kapitel 10

Brownsche Bewegung und Stochastische Differentialgleichungen

Lukas Reitemeier

Diese Seminararbeit beschäftigt sich mit gegensätzlichen Konzepten zur harmonischen Analysis. Durch das Beleuchten konträrer Eigenschaften und dem Verschmelzen der Themen entsteht hoffentlich ein wertvoller Beitrag zum Buch. Das Kapitel handelt von der Brownschen Bewegung und stochastischen Differentialgleichungen (SDGL), zwei eng verbundenen Themen, die interdisziplinär in verschiedenen Gebieten zur Anwendung kommen.

Die Entdeckungsgeschichte widerspiegelt diese Interdisziplinarität. Der Botaniker Robert Brown entdeckte im 19. Jahrhundert, dass in Flüssigkeit suspendierte Pollenteilchen unter seinem Mikroskop scheinbar zufällige Bewegungen ausführten. Er gilt als Entdecker der nach ihm benannten Brownschen Bewegung. Der französische Mathematiker Luis Bachelier, der für seine Arbeit *Théorie de la Spéculation* [bachelier1900thÃorie] in der Wahrscheinlichkeitstheorie und Finanzmathematik bekannt ist, hat versucht, die Brownsche Bewegung erstmals mathematisch zu modellieren, analog zu den Fluktuationen von Börsenkursen. Später trug der Physiker Albert Einstein mit seiner Arbeit *Untersuchungen über die Theorie der Brownschen Bewegung* [einstein1922untersuchungen] maßgeblich zum theoretischen Verständnis dieses Phänomens bei. Dies wiederum diente dem Mathematiker Norbert Wiener als Grundlage für die Entwicklung des Wiener-Prozesses, der ein zentrales Konzept in der Wahrscheinlichkeitstheorie und SDGL darstellt. So kann der Wiener-Prozess auch dazu genutzt werden, um sogenanntes weisses Rauschen zu modellieren.

Dank all diesen Entdeckungen ist es heute möglich zum Beispiel Finanzmathematik zu betreiben, akkurate Populationsmodelle zu erstellen und den Prozess der Diffusion mathematisch zu beschreiben.

10.1 Brownsche Bewegung

Als der schottische Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 in sein Mikroskop schaute, beobachtete er kleine Pollenpartikel in einer Flüssigkeit. Er bemerkt, dass sich die Teilchen scheinbar zufällig bewegen, obwohl keine Kräfte auf die Teilchen einwirken. Eine Erklärung hatte Robert Brown zu

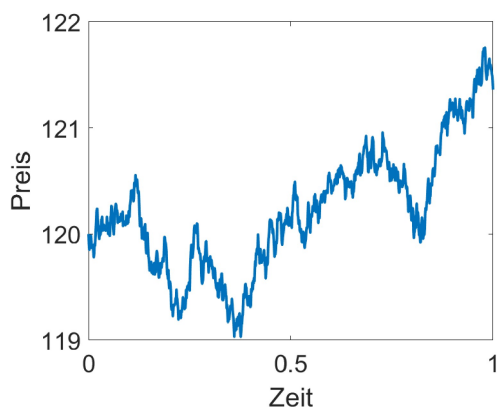


Abbildung 10.1: Simulierter Börsenkurs als Brownsche Bewegung.

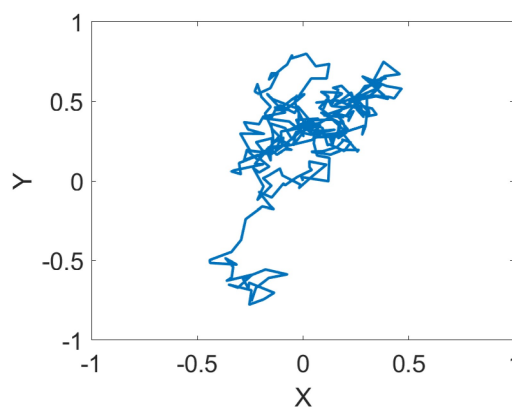


Abbildung 10.2: Simulierte Brownsche Bewegung in X- und Y-Richtung.

diesem Zeitpunkt für das Verhalten nicht. Es dauerte fast ein Jahrhundert, bis Albert Einstein diese Beobachtung auf ein solides theoretisches Fundament stellte und so nutzbar machte. Er schloss darauf, dass die unregelmäßige Bewegung auf Kollisionen mit umgebenden Molekülen zurückzuführen ist, welche ständig in Bewegung sind. Albert Einstein entwickelte eine mathematische Theorie, mit welcher die beobachtete Bewegung durch stochastische Zusammenstöße von Molekülen erklärt werden kann. Weiter konnte er einen Zusammenhang zwischen den Messungen der Bewegung, der Boltzmann-Konstante und der Avogadro-Zahl herstellen¹. Dies hatte Auswirkungen auf das Verständnis von Materie, da dies einen direkten empirischen Beleg für die Existenz von Atomen und Moleküle lieferte — die Atomhypothese wurde nicht nur bestätigt, sie wurde durch die Brownsche Bewegung auch beobachtbar. Diese besagt, dass Materie aus diskreten unteilbaren Einheiten besteht, sprich einzelnen Atomen oder ganzen Molekülen. Man muss dazu sagen, dass es schon zuvor Indizien für deren Existenz gab, doch es fehlte am entscheidenden experimentellen Beweis.

Die *Einstein-Smoluchowski-Gleichung* ist eine zentrale Gleichung der Arbeit [**einstein1922untersuchungen**] Sie beschreibt die mittlere quadratische Verschiebung (*mean square displacement*)

$$\text{MSD} = 2nDt \quad (10.1)$$

in Beziehung zur Diffusionskonstanten D , der Anzahl Raumdimensionen n und der Zeit t . Die Avogadro-Zahl A kann indirekt über die *Stokes-Einstein-Gleichung* anhand von Messungen berechnet werden. Die Diffusionskonstante

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta r} \quad (10.2)$$

kann mittels des Radius r der suspendierten Teilchen, der Boltzmann-Konstante k , der Temperatur T und der Viskosität η des umgebenden Mediums berechnet werden. Die Boltzmann-Konstante $k = R/A$ kann auch durch die allgemeine Gaskonstante R und die Avogadro-Zahl A ausgedrückt werden, wodurch sich der Zusammenhang

$$A = \frac{RT}{D(6\pi\eta r)} \quad (10.3)$$

¹Die Avogadro-Zahl A ist die Anzahl Teilchen (Atome oder Moleküle) welche in einem Mol einer Substanz enthalten sind. Die Boltzmann-Konstante k ist eine physikalische Konstante, die den Zusammenhang zwischen der thermischen Energie und der Temperatur eines Systems herstellt. Beide Konstanten sind miteinander verbunden durch die Gleichung $k = \frac{R}{A}$, wobei R die allgemeine Gaskonstante ist.



Abbildung 10.3: Ideales Signal



Abbildung 10.4: Reales Signal

für die Avogadro-Zahl ergibt. So ermöglichen die beiden Gleichungen einen experimentellen Ansatz zur Bestimmung der Avogadro-Zahl.

Die Brownsche Bewegung kann relativ einfach mittels der Euler-Maruyama-Methode, siehe Abschnitt 10.3.1, numerisch simuliert werden. Zugrunde liegt dabei der Wiener-Prozess, wie in Abschnitt 10.2.2 beschrieben. Dieser liefert die zufälligen Veränderungen in X - und Y -Richtung. Werden die einzelnen Zeitschritte mit Linien verbunden, ergibt sich das Bild einer typischen Brownschen Bewegung, wie dies in der Abbildung 10.2 zu sehen ist. Führt man eine solche Simulation in einer Dimension durch und implementiert eine durchschnittlich erwartete Änderungsrate, so ergibt sich ein Verlauf, der stark an einen Börsenkurs erinnert, wie dies in der Abbildung 10.1 zu sehen ist. Es lässt sich erahnen, dass die zugrundeliegende Mathematik auch in der Finanzindustrie zur Anwendung kommt und von grossem Nutzen ist.

10.2 Rauschen

Um dem Thema des Buches gerecht zu werden und dieses Kapitel einzugliedern, kann die harmonische Analysis als essenzielles Werkzeug betrachtet werden. So ist zum Beispiel die *Fast Fourier Transform (FFT)* eine wichtige Methode, um periodische Signale von Rauschen zu unterscheiden. Es kann bezüglich der Intensität der auftretenden Frequenzen und der Verteilung der Amplituden im Frequenzspektrum, also deren Leistungsdichte, charakterisiert werden. So können mittels harmonischer Analysis Filter entwickelt werden, welche ein Signal von Rauschen befreien. Für gewisse Anwendungen ist es auch möglich, mit hochfrequent überlagerten Schwingungen, Rauschen zu simulieren. Durch die Analyse von Systemantworten auf verschiedene harmonische Anregungen, kann eine Aussage gemacht werden, wie ein System auf echtes Rauschen als Störung reagieren würde.

10.2.1 Was ist Rauschen?

Rauschen ist in vielen technischen und wissenschaftlichen Disziplinen ein wichtiger Faktor, so kann es auch in verschiedenen Kontexten unterschiedlich definiert werden. In der Signal- und Kommunikationstechnik ist Rauschen als ungewollte kontinuierliche Störung eines Signals definiert. Ein perfektes, ungestörtes Signal, wie es in Abbildung 10.3 dargestellt ist, gibt es nur in der Theorie. In der Realität sind alle Signale von Rauschen behaftet, wie in der Abbildung 10.4 dargestellt. Eine solche Störung kann auf einem deterministischen Zusammenhang beruhen oder rein zufälliger Natur sein. Zum Beispiel kann bei elektronischen Messungen durch das Magnetfeld von Stromkabeln eine Störung hervorgerufen werden, dies wäre eine deterministische Störung (konstant 50 Hz Wechselstrom). Es gibt aber auch rein zufällige Störungen, wie zum Beispiel durch kosmische Teilchen, welche einen Empfänger oder Messgerät beeinflussen können. Wird ein Signal konstant von Störungen beeinflusst, kann von Rauschen gesprochen werden. Mathematisch können unterschiedliche Arten von Rauschen unterschieden werden [werner2008signale], einige der wichtigsten sind folgende:

Definition 10.1. Weisses Rauschen: *Ein Signal mit zufälligen Änderungen, welches eine konstante spektrale Leistungsdichte über alle Frequenzen hinweg aufweist (alle Frequenzkomponenten sind mit gleicher Intensität vertreten).*

Das Rauschen wird als “weiss” bezeichnet, analog zu weissem Licht, bei dem alle Farben des sichtbaren Spektrums überlagert sind. Es ist aber anzumerken, dass weisses Licht keine konstante Leistungsdichte im Spektrum aufweist. In der Zeitdomäne ist das weisse Rauschen ein unkorreliertes Signal. Ein Beispiel dafür ist das Rauschen von Radios, wenn die Frequenz nicht korrekt eingestellt ist. Dies wird ausgelöst durch Störeinflüsse, wie zum Beispiel: Elektrische Interferenzen, kosmische Einflüsse oder auch Blitzentladungen.

Definition 10.2. Rosa Rauschen: *Ein Signal mit zufälligen Änderungen, dessen Amplituden invers proportional zur Frequenz $1/f$ abnehmen. In der Elektronik wird der Abfall der Leistungsdichte mit 3 dB pro Oktave charakterisiert.*

Der Begriff “Rosa” ist auch eine Analogie zu sichtbarem Licht, bei dem tiefere Frequenzen eher rötlich erscheinen und überlagert mit Weiss (weisses Rauschen) Rosa ergeben. Um bei einem hörbaren Beispiel zu bleiben: Rosa Rauschen klingt als Schall ausgewogener und weicher als weisses Rauschen. Dies, da unangenehme hohe Frequenzen abgeschwächt werden.

Definition 10.3. Braunes Rauschen (Brownsches Rauschen): *Ein Signal mit zufälligen Änderungen, dessen Amplituden invers quadratisch zur Frequenz $1/f^2$ abnehmen. In der Elektronik wird der Abfall der Leistungsdichte mit 6 dB pro Oktave charakterisiert.*

“Braun” bezieht sich hier nicht auf eine Farbe, sondern ist Robert Brown gewidmet. Denn die Brownsche Modekühlbewegung entspricht diesem Rausch-Typ, da sich die beobachteten trägen Moleküle mit zunehmender Frequenz verstärkt gegenseitig behindern.

Definition 10.4. Gaussssches Rauschen: *Ein Signal mit zufälligen Änderungen, dessen Amplituden im Frequenzspektrum eine Normalverteilung (Gaussverteilung) um eine zentrale Frequenz aufweisen. Demzufolge kann Gausssisches Rauschen über zwei Parameter charakterisiert werden: den Mittelwert und die Varianz.*

Gaussssches Rauschen ist ein häufiges Artefakt in digitalen Bildern und daher von besonderer Bedeutung in der digitalen Bildverarbeitung. Die charakteristische “Körnigkeit” des Rauschens in einem Bild kann über eine zentrale Frequenz charakterisiert werden.

Definition 10.5. Impulsrauschen: *Ein Signal mit zufälligen kurzzeitigen Spitzen oder Abfälle der Signalintensität, also diskontinuierlichen skalierten Impulsen.*

Im Frequenzspektrum äussern sich die Impulse über einen breiten Bereich, ähnlich zur Fourier-Transformation eines Dirac-Impulses. Ein idealer Dirac-Impuls im Zeitbereich stellt im Frequenzbereich einen konstanten Wert über alle Frequenzen dar. In der digitalen Bildverarbeitung ist diese Art von Rauschen als “salt and pepper” bekannt. Dabei nehmen einzelne Pixel sporadisch extreme Werte an, entweder extrem dunkel (*pepper*) oder extrem hell (*salt*). Diese Pixel sind auf dem Bild leicht erkennbar und wirken ähnlich wie verstreute Salz- oder Pfefferkörner.

Natürlich kann noch zwischen vielen weiteren Typen unterschieden werden, doch auf diese wird nicht eingegangen.

Es gibt auch Signale, die visuell wie Rauschen wirken, obwohl diese kaum von einer zufälligen Störung behaftet sind. So zum Beispiel hochfrequente überlagerte Schwingungen oder auch aufmodulierte Signale. In der Nachrichtentechnik wird dies aus technischen Gründen gemacht, um

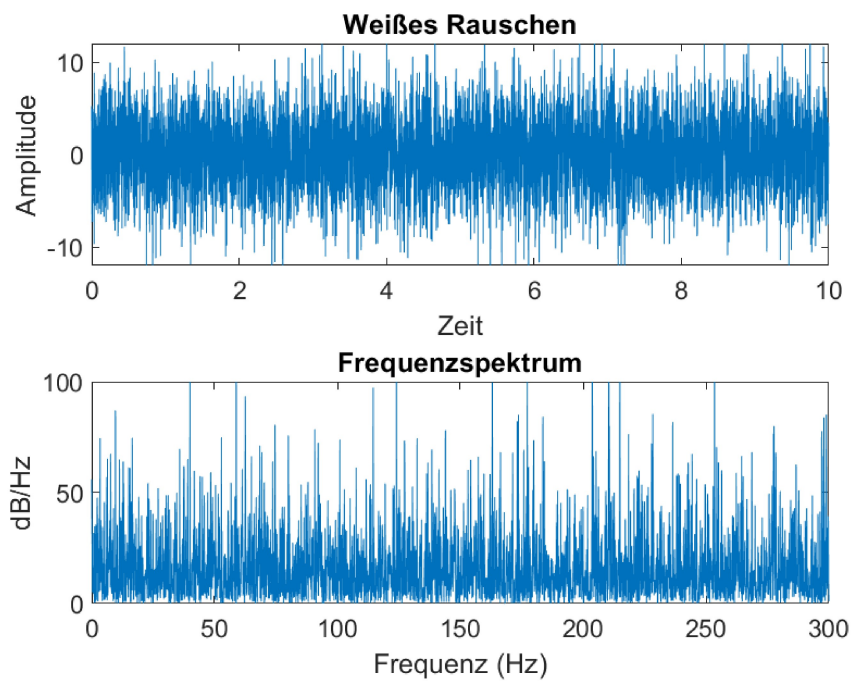


Abbildung 10.5: Echtes weißes Rauschen.

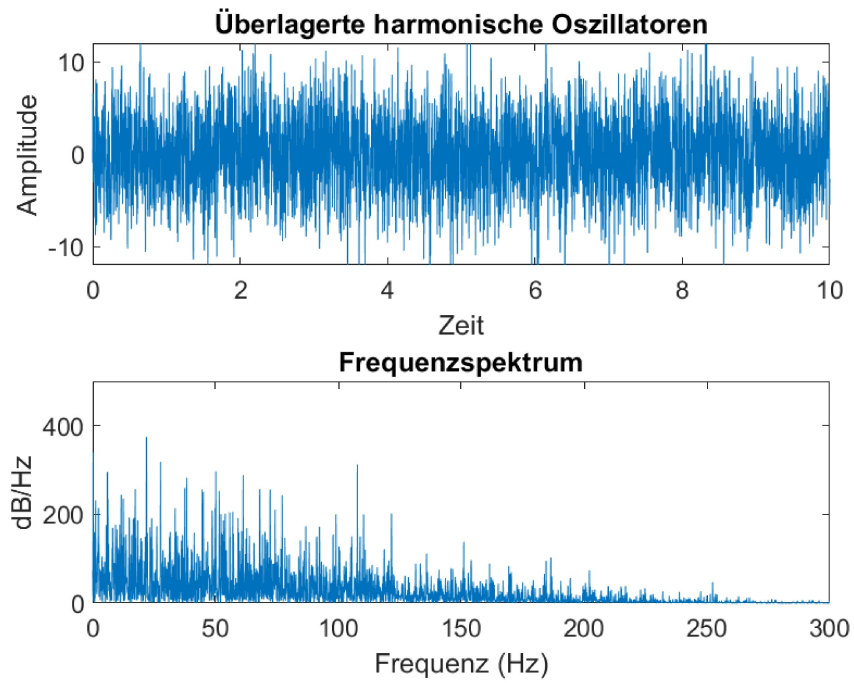


Abbildung 10.6: Überlagerte harmonische Oszillatoren.

zum Beispiel mehr Information über denselben Signalträger zu senden oder das Signal robuster zu übertragen. In den Abbildungen 10.5 und 10.6 sind zwei Signale aufgetragen, eines stellt echtes stochastisches Rauschen dar, das andere besteht aus vielen hochfrequenten überlagerten Schwingungen. Dieses Beispiel soll verdeutlichen, dass es nicht reicht, nur den zeitlichen Verlauf eines Signals zu betrachten. So könnte man fälschlicherweise die Signale als ähnlich erachten — eine krasse Täuschung, welche sich im Frequenzspektrum klar zeigt.

10.2.2 Rauschen mittels Wiener-Prozess

Um Rauschen zu modellieren, muss als Grundlage ein stochastischer Prozess definiert werden. Zwei weit verbreitete Konzepte dabei sind der *Random Walk* und der *Wiener-Prozess*.

Definition 10.6. Random Walk: Bei einem Random Walk beginnt man an einem Ausgangspunkt (normalerweise 0) und macht bei jedem Zeitschritt einen zufälligen Schritt vor oder zurück. Oft dient dazu die Binomialverteilung, wobei auch asymmetrische Verteilungen verwendet werden können. Die Schrittlänge und Richtung kann ebenfalls durch eine unabhängige Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden, wobei meist eine konstante Schrittlänge angenommen wird.

Definition 10.7. Wiener-Prozess: Der Wiener-Prozess ist ein kontinuierlicher stochastischer Prozess, der mit dem Wert 0 startet und unabhängige normalverteilte Änderungen aufweist.

Der Wiener-Prozess muss formal folgende Eigenschaften erfüllen:

1. Der Startwert von $t = 0$ ist $W(0) = 0$.
2. $W(t_1) - W(t_2)$ ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz $t_1 - t_2$. Es ergibt sich folgender Zusammenhang: $dW^2 = dt$.
3. Zu jedem weiteren Zeitpunkt t_n ist die Zufallsvariable unabhängig von allen vorhergehenden Werten und nirgends differenzierbar.

Beide Prozesse erfüllen die sogenannte *Markov-Eigenschaft*, was bedeutet, dass ihre zukünftige Entwicklung nur von ihrer aktuellen Position und nicht von ihrer vergangenen Geschichte abhängt. Speziell dabei ist, dass unabhängig von der verstrichenen Zeit der Erwartungswert stets dem Ausgangswert entspricht. Der Wiener-Prozess kann auch als Grenzwert eines Random Walks erachtet werden, sofern die Zeitschritte und Schrittgrößen gegen null gehen und der Prozess bei 0 startet. Der Wiener-Prozess und die Brownsche Bewegung werden oft als Synonyme verwendet. Beides sind kontinuierliche stochastische Prozesse, wobei der Wiener-Prozess explizit nirgends differenzierbar ist und eher in der Mathematik zur Anwendung kommt. Der Random-Walk zeichnet sich durch eine einfache numerische Implementation aus, da er per Definition schon diskret ist.

Genauer wird auf den Wiener-Prozess nicht eingegangen, da dieser ausführlich im Kapitel 8.1 *Modell für Rauschen: der Wiener-Prozess* des Buches [**brown:Differenzialgleichungen**] vom Mathematischen Seminar über Differentialgleichungen beschrieben wird.

Nun, da der Wiener-Prozess definiert ist, soll versucht werden weisses Rauschen zu simulieren. Dafür eignet sich der Wiener-Prozess perfekt, denn die Ableitung nach der Zeit

$$\xi(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (10.4)$$

ergibt weisses Rauschen. Dies ist auch der Grund, weshalb der Wiener-Prozess als nicht differenzierbar definiert ist. Die Änderungen sind rein zufällig und normalverteilt, so ergibt sich ein gleichmäßiges Frequenzspektrum der Änderungsraten. Es ist also keinerlei Information in den Änderungsraten enthalten.

In der Abbildung 10.7 ist die Simulation eines Wiener-Prozesses, also einer Brownschen Bewegung, und dessen Frequenzspektrum aufgetragen. Der Unterschied zum simulierten Börsenkurs in der Abbildung 10.1 ist lediglich, dass keine Drift-Komponente modelliert wurde. Man kann feststellen, dass die Leistungsdichte mit zunehmender Frequenz abnimmt. Dies bedeutet, dass tiefe Frequenzen sich im Signal stärker äussern als hohe, also mehr Energie beinhalten. Das Signal kann nun in der Zeitdomäne differenziert werden oder im Frequenzbereich durch eine komplexwertige Multiplikation mit der Frequenz $j\omega t$. So ergibt sich aus der Brownschen Bewegung mit abfallendem Frequenzspektrum ein konstantes Frequenzspektrum. In der Zeitdomäne stellt das Signal ausschliesslich weisses Rauschen dar, wie in der Darstellung 10.7 zu sehen ist.

Würde man nun das konstante Frequenzspektrum weiter differenzieren, vergrössert man nur die Amplituden, was sich im Zeitbereich durch ein zunehmend unetigeres Signal äussert. Deshalb ist weisses Rauschen für die meisten Zwecke nicht sinnvoll weiter differenzierbar.

10.2.3 Implikationen

Beim Umgang mit Messdaten und empfangenen Signalen ist die Problematik von Störungen und deren Einfluss auf die berechneten Änderungsraten allgegenwärtig. Dies kann zu falsch dekodierter Information und ungenauen Messergebnissen führen. Die einfachste Methode und häufig ein erster Schritt ist die Anwendung eines Tiefpass- oder Bandpassfilters. Dieser entfernt jedoch nicht nur störende Frequenzen, sondern auch ein Teil der im Signal enthaltenen Information. Die Anwendung eines gleitenden Mittelwertes lässt Störungen sich auf das ganze Signal auswirken. Die ist speziell problematisch bei kurzzeitigen intensiven Störungen, wie dies bei Impulsrauschen der Fall ist. In solchen Fällen ist ein Medianfilter zu bevorzugen.

Eine weitere Schwierigkeit entsteht, wenn anhand von Messdaten ein Modell erstellt werden soll, welches das Verhalten der Messdaten widerspiegelt. Dabei kann es sein, dass das Rauschen als Teil des Systems identifiziert wird oder als rein externe Störung. Im einen Fall muss dann zwischen System und Rauschen unterschieden werden, im anderen Fall muss das System selbst Rauschen abbilden können.

Ist ein System anhand einer gewöhnlichen Differentialgleichung (DGL) gegeben, kann das Verhalten des Systems unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen vorhergesagt werden. Vom Anfangswert aus entwickelt sich die Funktion gemäss der Startbedingung und dem durch die DGL gegebenen Vektorfeld. In vielen Situationen entspricht ein solch deterministisches System jedoch nicht der Realität und suggeriert eine Aussagekraft, welche sich nicht mit Beobachtungen deckt. Es gibt Systeme, welche stark auf kleine Störeinflüsse reagieren. Dies führt dazu, dass sich die Lösung einer DGL gegenüber der Realität, zum Beispiel durch Rauschen, nicht perfekt deckt oder das Resultat sogar komplett divergiert. Ein anschauliches Beispiel dafür ist das System

$$\frac{dx}{dt} = -y \quad (10.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = x^2 + y, \quad (10.6)$$

für welches in der Abbildung 10.8 zwei unterschiedliche Trajektorien im Vektorfeld eingezeichnet sind. In Rot ist der Verlauf im Intervall $t = [0, 3]$ mit dem Startwert $(-1.7, -1.4)$ aufgetragen und in Grün mit dem Startwert $(-1.8, -1.4)$.

Dieses System veranschaulicht schön, wie sich eine kleine Variation der Startbedingung auf den Verlauf der Lösung auswirken kann. In diesem speziellen Fall konvergieren die Lösung zu einem späteren Zeitpunkt t wieder. Bedenkt man nun aber, dass eine solche Störung durch Rauschen her-

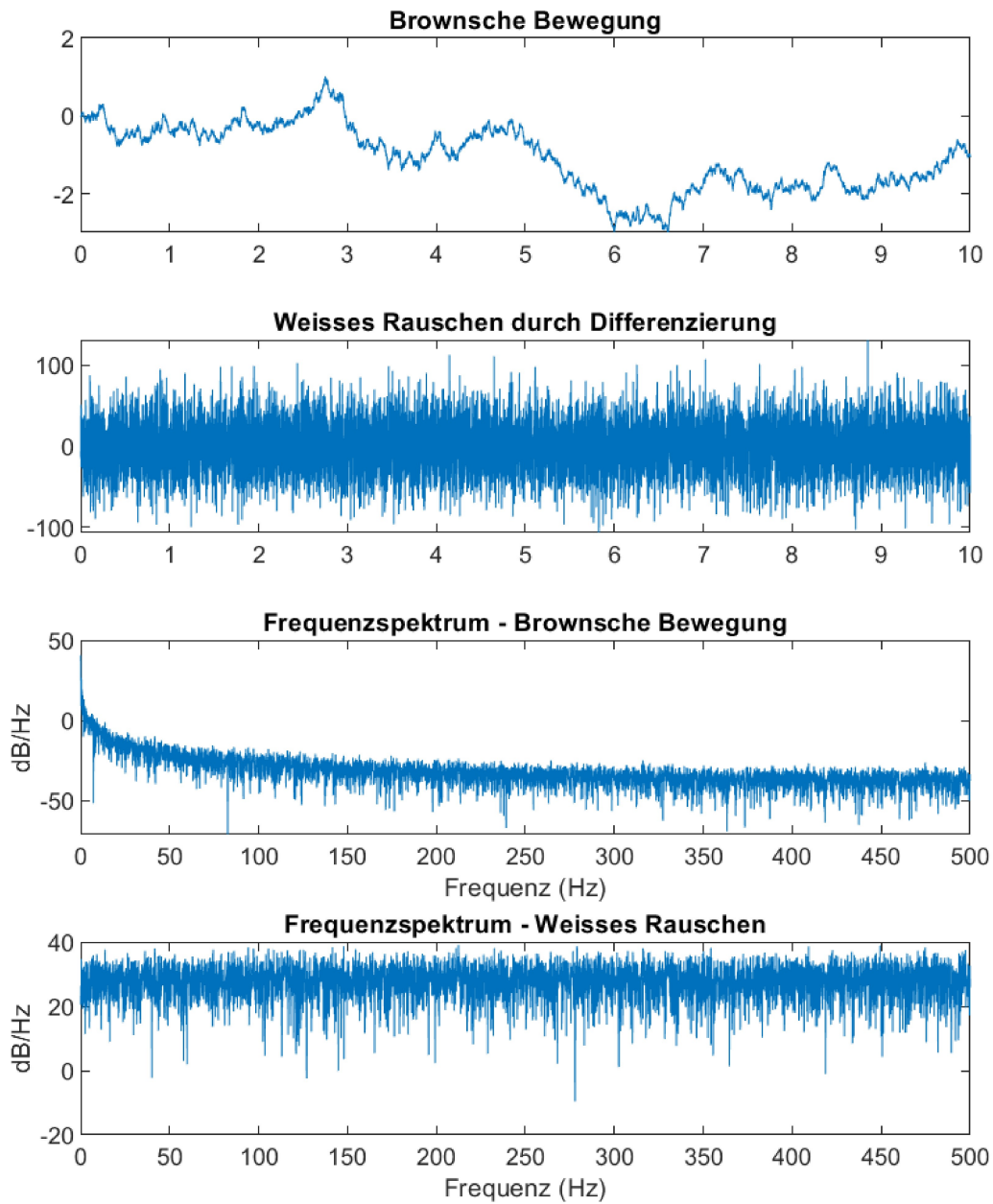


Abbildung 10.7: Weisses Rauschen durch Differenzierung des Wiener-Prozess.

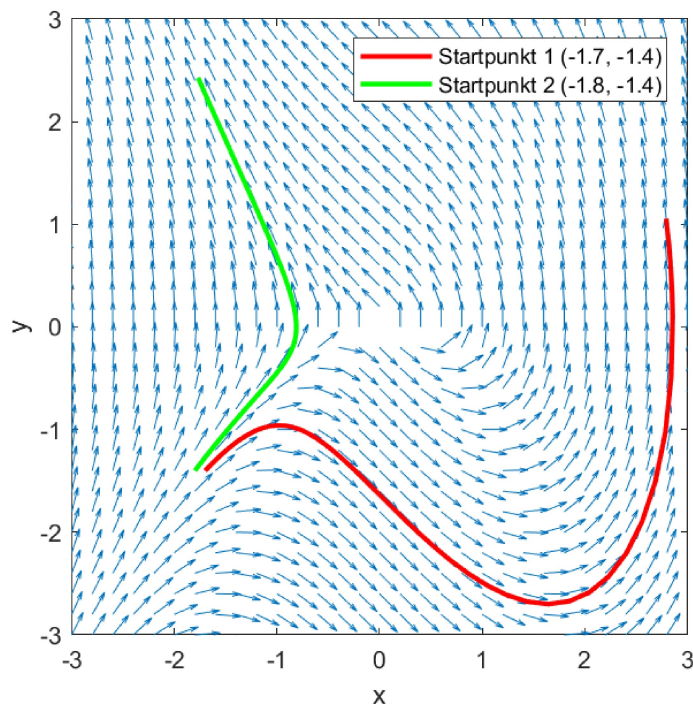


Abbildung 10.8: Vektorfeld mit zwei divergierenden Pfaden, trotz fast gleichem Startwert

beigeführt werden könnte, scheint es unsinnig, eine einzige fixe Lösung für ein solches System anzugeben — zumindest nicht ohne auf die Aussagekraft der Lösung, unter Rauscheinfluss, hinzuweisen oder den Lösungsraum genauer zu spezifizieren.

Es gibt auch Systeme, welche bei kleinen Störungen aus einem stabilen Zustand in einen instabilen Zustand übergehen und komplett divergieren. In solchen Fällen kann es ein fataler Fehler sein, zufällige Störungen des Systems nicht zu berücksichtigen. Andere Systeme beinhalten selbst eine zufällige Komponente, welche nicht vernachlässigt werden darf.

Um diesem Umstand gerecht zu werden, kann man die Möglichkeit von zufälligen Störungen beim Aufstellen eines Modells miteinbeziehen. Anstatt eine fixe Lösung zum Zeitpunkt t anzugeben, definiert man eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über die verschiedenen möglichen Endzustände — et voilà, man hat den Lösungsraum einer stochastische Differentialgleichung (SDGL).

10.3 Stochastische Differentialgleichungen

Formal kann eine SDGL folgendermassen notiert werden:

$$\dot{X}(t) = a X(t) + B X(t) \xi(t) \quad (t > 0). \quad (10.7)$$

In diesem Fall ist die Störung durch m -dimensionales weisses Rauschen $\xi(t)$ modelliert. B ist die sogenannte Dispersionsmatrix mit der Dimension $n \times m$. Sie beschreibt, wie sich die Störung auf die

unterschiedlichen inneren Zustände des Systems auswirkt. Dabei beschreibt die Diagonale der Matrix, wie stark sich jede Dimension des Rausches auf die entsprechenden inneren Zustände auswirkt. Die Bereiche links und rechts der Diagonalen der Matrix beschreiben die Beeinflussung der Dimensionen untereinander. a ist der Drift-Vektor und beschreibt die erwartete Veränderung für jeden inneren Zustand des Systems. Alles in allem beschreiben

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1m} \\ & \vdots & \\ B_{n1} & \dots & B_{nm} \end{pmatrix}$$

die Dynamik des Systems. Da weisses Rauschen $\xi(t)$ formal als die Ableitung vom Wiener-Prozess $\frac{dW(t)}{dt}$ modelliert werden kann, ergibt sich die Form

$$\frac{dX(t)}{dt} = aX(t) + BX(t) \frac{dW(t)}{dt} \quad (t > 0). \quad (10.8)$$

Nun sollte noch mit dt multipliziert werden, da die Gleichung sonst impliziert, dass man weisses Rauschen weiter differenzieren kann. Diese Form

$$dX(t) = a X(t) dt + B X(t) dW(t) \quad (t > 0) \quad (10.9)$$

nennt sich auch “Itô-Form” und ist vielfach ein erster Schritt im weiteren Umgang mit SDGLs. Weisses Rauschen $\frac{dW(t)}{dt}$ ist per Definition nicht sinnvoll weiter differenzierbar. Dies ist den Eigenschaften des Wiener-Prozesses geschuldet, wie in Abschnitt 10.2.2 dargelegt.

10.3.1 Euler-Maruyama-Methode

Die Euler-Maruyama-Methode wird oft zur numerischen Simulation von stochastischen Differentialgleichungen (SDGL) verwendet und basiert auf der bekannten Euler-Methode zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Die Idee ist es, die SDGL in diskrete Zeitschritte zu zerlegen und den deterministischen, wie auch den stochastischen Anteil, separat zu behandeln. Die Methode hat zwar gewisse Einschränkungen bezüglich ihrer Genauigkeit und Stabilität, ist aber dennoch mitunter aufgrund ihrer Einfachheit weit verbreitet [Bayram2018]. So wurden auch alle in diesem Kapitel gezeigten Simulationen mit dieser Methode umgesetzt. Um eine SDGL mittels der Euler-Maruyama-Methode zu simulieren, geht man wie folgt vor:

1. Man wählt eine Schrittweite $\Delta t > 0$ und teilt das Zeitintervall $[0, T]$ in N gleich grosse Teilintervalle der Länge Δt .
2. Für jeden Zeitschritt i von 0 bis $N - 1$ werden die Werte der Funktion $X(t)$ an den diskreten Zeitpunkten t_i iterativ gemäss

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + a X(t_i) \Delta t + B X(t_i) \sqrt{\Delta t} \cdot Z_i, \quad (10.10)$$

berechnet, wobei die Z_i unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind.

Vereinfacht kann die numerische Berechnung des nächsten Simulationswertes

$$X_{n+1} = X_n + f(X_n) \Delta t + g(X_n) \Delta W_n. \quad (10.11)$$

als Funktion der des aktuellen Wertes X_n ausgedrückt werden. Die Funktion $f(X_n)$ beschreibt wieder den deterministischen Teil der SDGL, also die Drift-Komponente, welche Information enthält. Das Rauschen, wird mit $g(X_n)$ charakterisiert, wobei ΔW_n als numerische Implementation des Wiener-Prozesses den Zufall bei jedem Berechnungsschritt Schritt einbringt.

10.3.2 Die Itô-Formel

Itô Kiyoshi war ein japanischer Mathematiker, der seine Karriere der Stochastik widmete und heute als Begründer der stochastischen Analysis erachtet werden kann. So legte er auch einen Grossteil des Fundaments, auf dem der Umgang mit SDGLs beruht. Nach ihm ist auch die schon verwendete *Itô'sche Form* einer SDGL benannt, bei welcher die Gleichung mit dem Nenner des Differentialquotienten multipliziert wird. Diese Form eignet sich als Ausgangslage für viele seiner Konzepte, bietet jedoch auch den Vorteil, dass keine vermeintliche Differenzierbarkeit impliziert wird. Eines der wichtigsten Werkzeuge im Umgang mit SDGLs, ist die sogenannte *Itô-Formel*, auch *Lemma von Itô* genannt. Sie stellt das Äquivalent zur klassischen Kettenregel bzw. der Substitutionsregel dar. Hier ein Beispiel einer SDGL für einen Prozess $X(t)$ in *Itô-Form*:

$$dX(t) = a(X(t)) dt + B(X(t)) dW(t) \quad (t > 0). \quad (10.12)$$

Angenommen, man hat eine Funktion $f(X, t)$, dann kann die Änderung von f in Bezug auf X und t wie folgt geschrieben werden

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} dX + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (dX)^2. \quad (10.13)$$

Die Itô-Formel erlaubt es uns solche Differentialgleichungen für Funktionen von stochastischen Prozessen abzuleiten. Das Einsetzen der SDGL in die Itô-Formel ergibt

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial X} (a dt + B dW) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (B^2 dt). \quad (10.14)$$

Die Itô-Formel kann als eine stochastische Version der Taylor-Entwicklung angesehen werden. $\frac{\partial f}{\partial t} dt$ beschreibt, wie sich die Funktion f allein durch den Verlauf der Zeit ändert, unabhängig von anderen Faktoren. $\frac{\partial f}{\partial X} (a dt)$ ist der *Drift-Term*, der den deterministischen Teil darstellt und der Term $\frac{\partial f}{\partial X} (B dW)$ stellt den stochastischen *Diffusions-Term* dar. Zusammen beschreiben die zwei Terme den Einfluss der ersten Ableitung und der Term $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} (B^2 dt)$ den Einfluss zweiter Ordnung. Dass aus $(dX)^2$ eingesetzt $(B^2 dt)$ wird, ist folgendermassen zu erklären: Eigentlich würde eingesetzt sich $(dX)^2 = a^2 dt^2 + 2aB dt dW + B^2 dW^2$ ergeben. Da dt^2 und $dt dW$ im stochastischen Kontext vernachlässigbar klein sind (tendieren viel schneller gegen Null als dt), ist der einzig relevante Beitrag zu $(dX)^2$ der Term $B^2 dW^2$. Und aufgrund der Eigenschaft des Wiener-Prozesses, dass $dW^2 = dt$ ergibt, wird der dieser Ausdruck zu $(B^2 dt)$.

10.3.3 Fazit

Um den Bogen zum Anfang wieder zu schliessen, der Zufall und insbesondere Rauschen weisen keinerlei Periodizität oder harmonische Eigenschaften auf. Genau deshalb lässt sich zufälliges Rauschen gut mittels der harmonischen Analysis untersuchen und charakterisieren. Dies ermöglicht in diversen technischen Bereichen den Umgang mit zufälligen Störungen, das Eliminieren von Rauschen und es lassen sich durch SDGLs solche zufälligen Störungen modellieren. Dies führt zu einem wahrheitsgetreueren Abbild der Realität. Denn der Zufall beeinflusst in einem gewissen Masse praktisch jedes System — hoffentlich lieferte dieses Kapitel einen hilfreichen und interessanten Überblick im Umgang damit.

